

DIE DYNAMIK DER AXIALEN WÄRMEÜBERTRAGUNG BEI TURBULENTER ROHRSTRÖMUNG

H. SCHMIDL

Institut für Reaktortechnik, Österreichische Studiengesellschaft für Atomenergie, A-1082 Wien, Austria

(Received 1 September 1971)

Zusammenfassung—Bei einer turbulenten Strömung im Rohr erfolgt der Wärmetransport ausser durch Konvektion auch durch molekulare und durch turbulente Übertragung. Bei Experimenten ergab sich jedoch, dass nach Temperaturstörungen am Rohreingang, in axialer Richtung ein ausserordentlich rascher Temperaturengleich erfolgt, der nicht durch die beiden letzten oben angegebenen bekannten Grössen erklärt werden kann. Es ist hier zusätzlich ein anderer Mechanismus der Wärmeübertragung wirksam.

Betrachtet man den Vorgang bei einem Koordinatensystem, das sich mit der mittleren Durchflussgeschwindigkeit in axialer Richtung bewegt, so scheint die Störungsstelle still zu stehen. Es lassen sich dann im Rohr zwei Flüssigkeitsschichten unterscheiden, die in gegenläufiger Richtung durchflossen werden. Denkt man sich zwischen beiden Schichten eine fiktive Trennwand gelegt, so erhält man das Modell eines Gegenstromwärmetauschers. Die Wärmeübertragung erfolgt somit nicht durch den Rohrquerschnitt, sondern über die viel grössere Fläche der fiktiven Trennwand. Damit ist auch der gemessene rasche Temperaturengleich geklärt.

NOMENKLATUR

a ,	Temperaturleitzahl;	T ,	Temperatur;
A_t ,	turbulente Austauschgrösse für den Impuls;	T' ,	Schwankungsgrösse der Temperatur;
A_q ,	turbulente Austauschgrösse für die Wärme;	ΔT ,	Temperaturdifferenz zwischen den Anfangswerten, $= T_i - T_r$;
A ,	gesamter Rohrquerschnitt;	u ,	örtliche Flüssigkeitgeschwindigkeit in Richtung Rohrachse;
$A_{1,2}$,	Durchflussquerschnitt im primären bzw. sekundären Teil des fiktiven Wärmetauschers;	u^* ,	Schubspannungsgeschwindigkeit, $= \sqrt{(\tau_0/\rho)}$
c ,	spezifische Wärme;	\bar{u} ,	Mittelwert der Geschwindigkeit;
k ,	Wärmedurchgangszahl der fiktiven Trennwand;	u' ,	Schwankungsgrösse der Geschwindigkeit in axialer Richtung;
q ,	Wärmestromdichte;	u_1 ,	mittlere Geschwindigkeit im Kernbereich;
Q ,	axialer Wärmefluss im Rohr über den Gesamtquerschnitt;	u_2 ,	mittlere Geschwindigkeit im Ringbereich;
r ,	Koordinate in radialer Richtung;	U ,	Umfang der fiktiven Trennwand, $= 2\pi R_0$;
R ,	Rohrradius;	v ,	Volumsdurchfluss im Ring- bzw. Kernbereich;
R_0 ,	Radius bei dem die örtliche Geschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} ist;	v' ,	Schwankungsgrösse der Geschwindigkeit in radialer Richtung;
t ,	Zeit;	x ,	Koordinate in axialer Richtung des

	Rohres bei bewegtem System;
y ,	Koordinate in axialer Richtung des Rohres bei ruhendem System;
γ ,	spez. Gewicht, $= \rho g$;
η ,	normierte Zeit;
ϑ ,	normierte Temperatur;
ϑ_m ,	mittlere Temperatur, $= (\vartheta_1 + \vartheta_2)/2$;
$\Delta\vartheta$,	Temperaturdifferenz, $= \vartheta_1 - \vartheta_2$;
λ ,	Wärmeleitfähigkeit;
μ ,	dynamische Zähigkeit;
ν ,	kinematische Zähigkeit, $= \mu/\rho$;
ξ ,	normierte Länge im bewegten Koordinatensystem;
ρ ,	Dichte;
τ ,	Schubspannung;
τ_0 ,	Wandschubspannung;
$\phi(x)$,	Fehlerfunktion.

Tiefgesetzte Indices

ed ,	eindimensionales Modell;
mod ,	Zweischicht-Modell;
l ,	links
r ,	rechts
	} bezogen auf den Koordinatenursprung der Flüssigkeit im Rohr;
f ,	fiktiv;
mol ,	molekular;
tur ,	turbulent;
$rtur$,	radial turbulent;
rt ,	radial gesamt;
t ,	gesamt (molekular und turbulent);
1,	Kernbereich;
2,	Ringbereich.

1. EINLEITUNG

ÜBER das stationäre Verhalten eines Mediums bei Wärmeübertragung wird in der Literatur ausreichend berichtet. Über das dynamische Verhalten jedoch sind nur wenige Untersuchungen bekannt, obwohl dieses Problem für das regeltechnische Verhalten von Wärmekraftanlagen von Bedeutung ist.

Besonders schwierig erscheint die Untersuchung der Dynamik der Wärmeübertragung bei turbulenter Strömung. Von experimenteller Seite her werden die Messungen durch die Erscheinungen der Turbulenz stark gestört.

Von der theoretischen Seite her ist es schwierig, die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen einer Lösung zuzuführen.

Um die Problematik etwas zu vereinfachen, wird in vorliegender Arbeit eine axialsymmetrische Rohrströmung behandelt. Betrachtet man das durchflossene Rohr als Regelstrecke, so treten als Störgrößen die Eingangstemperatur, die Durchflussgeschwindigkeit und der Wärmedurchfluss durch die Rohrwand in Erscheinung. Hier wird nur der erste Störungsfall untersucht. Die beiden anderen Größen sollen konstant bleiben. Dadurch ergibt sich, dass das Differential-Gleichungssystem linear bleibt.

Geplant ist an Hand weiterer Experimentalsreihen, auch die beiden anderen Störfälle zu untersuchen, um ein geschlossenes Bild der Dynamik der Wärmeübertragung zu erhalten.

2. VERGLEICH DER VERSCHIEDENEN TEMPERATURLEITZAHLEN BEI TURBULENTER ROHRSTRÖMUNG

Es wird die molekulare Temperaturleitfähigkeit mit der sog. turbulenten, in axialer bzw. in radialer Richtung wirkend, verglichen.

2.1 Die turbulente Temperaturleitfähigkeit nach Reichardt und Ludwig

Nach Reichardt [1] kann für die Wärmestromdichte folgender Ansatz getroffen werden

$$q_t = q_{mol} + q_{tur} \quad (1)$$

Dabei bedeutet

$$q_{mol} = \lambda \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

die molekulare Übertragung und

$$q_{tur} = c \cdot A_q \cdot \frac{dT}{dr} \quad (3)$$

die turbulente Übertragung. A_q ist die sogenannte turbulente Austauschgrösse für die Wärme. Damit kann man auch eine turbulente Temperaturleitfähigkeit, wie folgt, definieren:

$$a_{rtur} = \frac{A_q}{\rho} \quad (4)$$

Die molekulare Temperaturleitzahl ist

$$a_{mol} = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (5)$$

Beides zusammen, Gl. (4) und (5), gibt ein

$$a_{rt} = \frac{1}{c\rho} (\lambda + c \cdot A_q) \quad (6)$$

Für A_q , bzw. a_{rt} sind in der Literatur keine Werte zu finden.

Man führt nach [4] neben der Prandtl-Zahl für molekulare Transportvorgänge

$$Pr = \frac{\mu c}{\lambda}$$

eine Analoge für turbulente Transportvorgänge mit

$$Pr_t = \frac{A\tau}{A_q} \text{ ein.} \quad (7)$$

In [5] gibt Ludwig experimentelle Werte für Pr_t in Abhängigkeit von r an. Diese Werte erscheinen für den Bereich der Machzahl $M = 0 - 0.870$ weitgehend von der Machzahl unabhängig.

Die turbulente Austauschgrösse für den Impuls wird von Reichardt [8], wie folgt, angegeben.

$$\frac{A\tau}{\mu\eta_R} = \frac{\varkappa}{3} \left[0.5 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (8)$$

wobei $\varkappa \approx 0.4$ eine Konstante darstellt, und

$$\eta_R = \frac{Ru^*}{\nu} \quad \text{mit} \quad u^* = \sqrt{(\tau_0/\rho)}$$

ist. τ_0 ist die Wandschubspannung und kann durch das Gesetz von Blasius [4] gefunden werden.

Mit den Gl. (7) und (8) sowie den experimentellen Ergebnissen von Ludwig kann ein a_{rtur} in Abhängigkeit von der Re -Zahl und von dem radialen Abstand gefunden werden. Wird das

a_{rtur} über den gesamten Rohrquerschnitt gemittelt, so erhält man \bar{a}_{rtur} . Diese Grösse, in Abhängigkeit von der Re -Zahl, wird in Abb. 1 gezeigt, wobei $\nu = 1.06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$ (Wasser bei 100°C) vorgegeben wurde. Zum Vergleich ist auch für Wasser von 20°C $a_{mol} = 0.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$, das natürlich beiruhender Flüssigkeit ($Re = 0$)

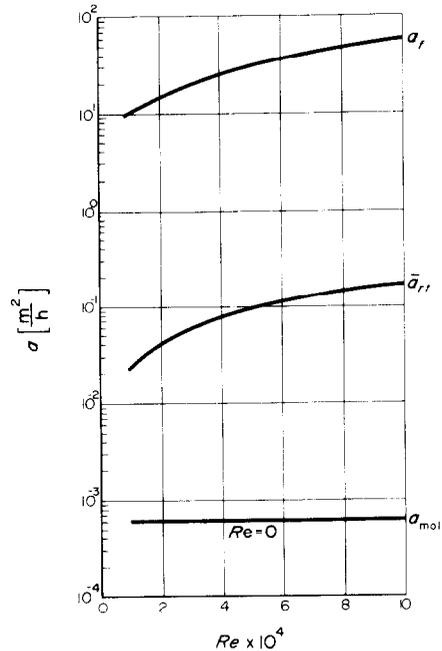


ABB. 1. Vergleich der verschiedenen Temperaturleitzahlen.

Geltung hat, eingezeichnet. Man sieht, dass a_{rt} im groben Durchschnitt 100-mal grösser als a_{mol} ist. Man kann somit a_{mol} gegenüber a_{rtur} vernachlässigen und schreiben

$$\bar{a}_r \approx \bar{a}_{rtur} \quad (9)$$

2.2 Die axiale Temperaturleitzahl

Mit Reichardt [3] kann die radial wirkende turbulente Temperaturleitzahl, wie folgt, angegeben werden

$$a_{rtur} = - \frac{\overline{\vartheta' T'}}{\overline{\frac{\partial T}{\partial r}}} \quad (10)$$

Analog kann auch eine axial wirkende Temperaturleitzahl definiert werden

$$a_{xtur} = - \frac{\overline{u' T'}}{\overline{\frac{\partial T}{\partial x}}} \quad (11)$$

Für a_{xtur} liegen in der bekannten Literatur keine Messungen vor. Ihr Einfluss wird auch normaler Weise vernachlässigt.

Bei grossen axialen Temperaturstörungen ist diese Vernachlässigung jedoch nicht mehr zulässig, und die Kenntnis der Grösse von a_{xtur} ist notwendig.

Die turbulenten Schwankungsgrössen u' und v' wurden in einer Kanalströmung untersucht (siehe Reichardt [6]). Es zeigte sich, dass die Werte $\sqrt{(\bar{u}^{12})}$ und $\sqrt{(\bar{v}^{12})}$ von gleicher Grössenordnung sind. Daraus ergibt sich in grober Abschätzung, dass auch a_{xtur} und a_{rtur} von gleicher Grössenordnung sein müssen.

Um die Richtigkeit obiger Annahmen zu prüfen, wurden im Reaktorzentrum Seibersdorf an Hand zahlreicher Versuche eine axiale Temperaturleitzahl a_f gemessen. Es zeigte sich jedoch wider allen Erwartens, dass dieses a_f im Durchschnitt rund hundert mal grösser als a_{rt} und damit auch a_{xt} ist (siehe Abb. 1).

Es erscheint unmöglich, diese ausserordentlich grossen Werte von a_f durch eine turbulente Austauschgrösse zu erklären. Dafür muss ein anderer Mechanismus des Wärmetransportes verantwortlich gemacht werden.

3. MODELLE DER AXIALEN WÄRMELEITUNG BEI TURBULENTER RÖHRSTRÖMUNG

Im folgenden soll versucht werden, die Ursache der oben aufgezeigten Unstimmigkeit zu klären. Um die Untersuchungen zu vereinfachen, wird

der einfachste Fall der axialen Wärmeübertragung angenommen. Dieser stellt eine Rohrströmung dar, bei der durch die Rohrwand keinerlei Wärmedurchgang erfolgt. Im stationären Zustand wird diese Flüssigkeitsströmung im Rohrrinneren überall die gleiche Temperatur anzeigen.

3.1 Eindimensionales Modell (siehe auch [7])

Bei diesem einfachsten Modell werden nur Mittelwerte über den gesamten Rohrquerschnitt betrachtet. Die Energiegleichung für diesen Fall lautet

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a_f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (12)$$

wobei ϑ eine analog Gl. (15) normierte über den Querschnitt gemittelte Temperatur darstellt. a_f ist eine fiktive Temperaturleitzahl, deren Grösse nur aus Messungen bekannt ist. Obige Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn man statt dem stillstehenden Koordinatensystem (ϑ, y) ein mitgehendes (ϑ, x) wählt (siehe Abb. 2), wobei die Geschwindigkeit des neuen Systems gegenüber dem alten \bar{u} (die mittlere Flüssigkeitsgeschwindigkeit) ist. Es wird somit $y = x + \bar{u}t$. Tritt am Eingang des Rohres eine Temperaturstörung auf, so wandelt diese mit der Geschwindigkeit \bar{u} durch das Rohr. Durch die obige Koordinatentransformation steht die Störstelle sozusagen still. An Stelle obiger Gleichung erhält man

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a_f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (13)$$

Diese Differentialgleichung entspricht formal auch dem Temperatursprung in einem festen Stab oder in einem ruhen den Medium. Nimmt man als Temperaturstörung zur Zeit $t = 0$ den Einheitssprung an (siehe Abb. 2) so erhält man als Lösung der Gl. (13)

$$\begin{aligned} \vartheta(t, x) &= \frac{1}{2} \left[1 - \phi \left(\frac{x}{2\sqrt{(a_f t)}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{(a_f t)}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

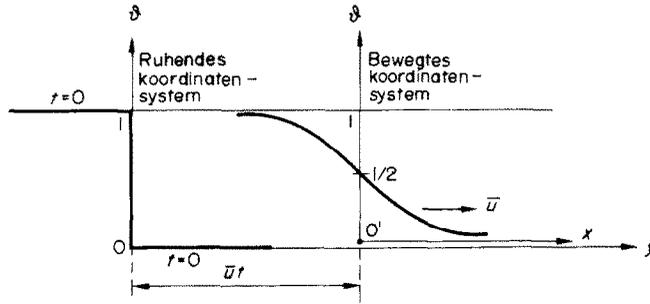


ABB. 2. Das stationäre und das bewegte Koordinatensystem bei sprungförmiger Temperaturstörung.

wobei

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2} dv$$

die sogenannte Fehlerfunktion darstellt.

Dieses Modell ermöglicht, sobald a_f bekannt ist, infolge seiner eindimensionalen Darstellung eine einfache Wiedergabe des über den Querschnitt gemittelten Temperaturverlaufes. Die tatsächlichen Vorgänge sind jedoch damit nicht erfassbar und bedürfen einer räumlichen Betrachtung.

3.2 Das Zweischichten-Modell

Im folgenden soll versucht werden, entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung, wie

sie in Abb. 3 links aufgezeichnet ist, ein derartiges räumliches Modell aufzubauen. Für $r = 0$ erreicht die Geschwindigkeit ihren maximalen Wert, an der Wand $r = R$ ist sie Null. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt \bar{u} . Sie ist zugleich die Geschwindigkeit für den Grenzzadius R_0 . Das bedeutet, dass für ein $r < R_0$ die Geschwindigkeit $u > \bar{u}$ und umgekehrt für $r > R_0$ ist.

Betrachtet man wieder ein mit der Geschwindigkeit \bar{u} bewegtes Koordinatensystem, so ist hier die mittlere Geschwindigkeit der Strömung Null. Innerhalb des Radius R_0 der sog. 1. Schicht oder dem Kernbereich ist die Geschwindigkeit $\Delta u = u - \bar{u} > 0$ (siehe Abb. 3). Die 2. Schicht oder der Ringbereich umfasst den Bereich von $R_0 < r < R$ in diesem ist $\Delta u < 0$.

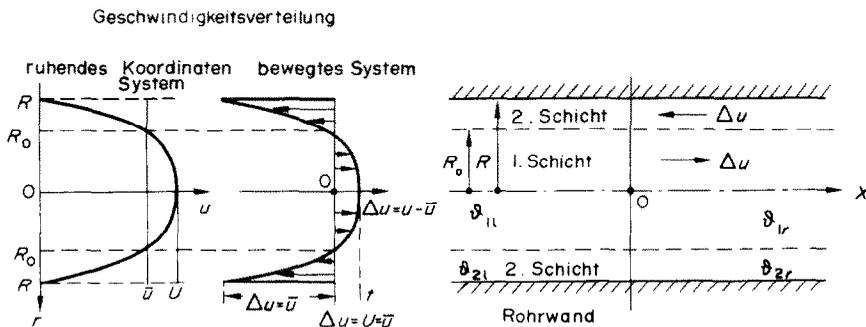


ABB. 3. Radiale Geschwindigkeitsverteilung und 2-Schichtströmung.

Zur Zeit $t = 0$ wird angenommen, dass in der rechten Hälfte der Flüssigkeitssäule ($x > 0$), einheitlich die Temperatur T_r bzw. $\vartheta = 0$ herrscht, wenn

$$\vartheta = \frac{T - T_r}{T_l - T_r} \quad (15)$$

die normierte Temperatur darstellt. In der linken Flüssigkeitshälfte ($x < 0$) sei die Temperatur

Ein analoger Vorgang muss sich natürlich auch bei einer laminaren Strömung ausbilden. Der Unterschied liegt in dem Wärmeausgleich zwischen den beiden Schichten. Bei laminarer Strömung ist bestimmend dafür das a_{mol} für turbulente Strömung dagegen das viel grössere a_{rtur} . Im folgenden wird versucht, das hier aufgezeigte Anschauungsmodell rechnerisch zu erfassen.

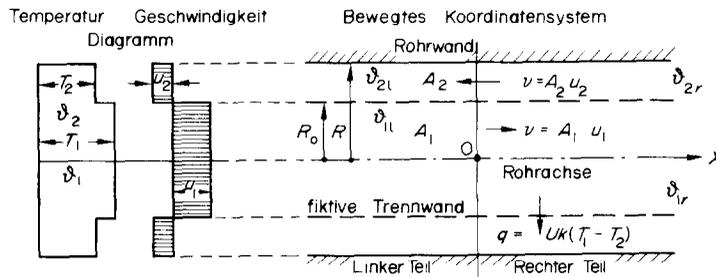


ABB. 4. Darstellung der Temperaturverteilung im Rohr durch das Modell eines Wärmetauschers.

T_l bzw. $\vartheta = 1$. Für $t > 0$ wird nun, wie der Abb. 3 leicht zu entnehmen ist, Flüssigkeit mit der Temperatur $\vartheta = 1$ in der 1. Schicht von links nach rechts fließen, und in der 2. Schicht Flüssigkeit mit $\vartheta = 0$ von rechts nach links. Die Grenz zwischen den beiden Zonen ist ein Zylindermantel mit dem Radius R_0 . Auf der rechten Seite wird sich der Kernbereich aufwärmen, auf der linken Seite wird der Ringbereich abkühlen. Auf beiden Seiten bilden sich zwischen den Schichten Temperaturdifferenzen aus, und es wird Wärme von der inneren Schicht in die äussere fließen.

Ist anfangs zur Zeit $t = 0$ die Fläche durch die der Wärmeausgleich erfolgen kann nur $R^2\pi$, so ist danach die zur Verfügung stehende Fläche gleich dem Zylindermantel $2\pi R_0 L$, wobei L die wirksame Länge desselben darstellt. Durch diese grosse Fläche kann ein rascher Wärmeausgleich erfolgen, womit sich ein grosses a_f erklären lässt.

3.3 Die Differentialgleichungen des Zweischicht-Modelles und deren Lösungen

An Hand der im letzten Abschnitt entwickelten Modellvorstellung soll versucht werden, die Temperaturverteilung in der turbulenten Rohrströmung zu erfassen. Dazu könnte die allgemeine Energiegleichung verwendet werden. Eine entsprechende Lösung ist zurzeit unbekannt, und es erscheint daher eine weitere Vereinfachung des obgenannten Modells notwendig.

Dies soll durch die Zurückführung auf ein konventionelles eindimensionales Modell versucht werden. Das gelingt sehr einfach, in dem man sich zwischen den Schichten 1. und 2. beim Radius R_0 eine fiktive Trennwand vorstellt. Durch diese Wand strömt je Längen- und Zeiteinheit die Wärmemenge

$$q = Uk(T_1 - T_2)$$

wobei $U = 2\pi R_0$ den Umfang der fiktiven Trennwand darstellt. k ist die Wärmedurch-

gangszahl durch die fiktive Trennwand. Sie kann natürlich nicht mit der entsprechenden normalen Grösse verglichen werden, da tatsächlich keine Wand vorhanden ist. T_1 und T_2 sind die Mittelwerte der Temperaturen in der 1. bzw. 2. Schicht (siehe Abb. 4). Rein formal kann man auf dieser Basis von einem Wärmetauscher sprechen, wobei T_1 die Temperatur, u_1 die Durchflussgeschwindigkeit des Primärteiles, T_2 und u_2 die des Sekundärteiles ist. Damit können die bekannten Gleichungen verwendet werden. Für den vorliegenden Fall lauten sie

$$\begin{aligned} A_1 c \gamma \frac{\partial T_1}{\partial t} + A_1 c \gamma u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -Uk(T_1 - T_2) \\ A_2 c \gamma \frac{\partial T_2}{\partial t} - A_2 c \gamma u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} &= -Uk(T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (16)$$

A_1 bzw. A_2 ist der Durchflussquerschnitt im primären bzw. sekundären Teil. $A_1 + A_2 = A$ stellt den gesamten Rohrquerschnitt dar. Die obigen Gleichungen gelten für das mit \bar{u} bewegte Koordinatensystem. Da in diesem System der Durchfluss über den gesamten Rohrquerschnitt Null ist, so muss sein

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 = v. \quad (17)$$

Normiert man die Temperatur entsprechend Gl. (15), so gelten als Anfangsbedingungen (für $t = 0$) bei $x > 0$ $\vartheta_r = 0$ und bei $x < 0$ $\vartheta_l = 1$.

Werden die Gl. (16) Laplace-transformiert, so erhält man im Bildraum als Lösung für $x > 0$

$$\begin{aligned} \vartheta_{1r} &= c_{11} e^{\lambda_1 x} + c_{12} e^{\lambda_2 x} \\ \vartheta_{2r} &= c_{21} e^{\lambda_1 x} + c_{22} e^{\lambda_2 x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Analog findet sich für $x < 0$:

$$\begin{aligned} \vartheta_{1l} &= \frac{1}{s} + D_{11} e^{\lambda_1 x} + D_{12} e^{\lambda_2 x} \\ \vartheta_{2l} &= \frac{1}{s} + D_{21} e^{\lambda_1 x} + D_{22} e^{\lambda_2 x}. \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{\alpha}{2} s \pm \sqrt{[\beta(1 + \tau s) s]} \\ \alpha &= \frac{1}{u_1} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \\ \beta &= \frac{UA}{c\gamma} \frac{k}{v^2} \\ \tau &= \frac{c\gamma A}{4Uk}. \end{aligned} \quad (20)$$

Aus den Gl. (18) und (19) lassen sich mit Hilfe der folgenden Randbedingungen die Konstanten c_{ij} und D_{ij} bestimmen.

1. Randbedingung: für $|x| \gg 1$ muss $\vartheta < 1/s$ bleiben.

2. Randbedingung: für $x = 0$ gilt $\vartheta_{1l} = \vartheta_{1r}$ und $\vartheta_{2l} = \vartheta_{2r}$

Für spätere Berechnungen erweist es sich als vorteilhaft aus ϑ_1 und ϑ_2 folgende Werte zu definieren:

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \text{ und } \Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad (21)$$

der arithmetische Mittelwert der Gl. (21) besitzt keine physikalische Bedeutung. Die Funktion ist jedoch, wie anschliessend zu sehen ist, in ihrem Aufbau einfacher und leicht in den Originalraum zu transformieren. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man mit den Gl. (18), (19) und (21)

$$\begin{aligned} \vartheta_{ml}(s, x) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{\lambda_1 x}}{2s}; \quad \vartheta_{mr}(s, x) = \frac{e^{\lambda_2 x}}{2s} \\ \Delta\vartheta_l(s, x) &= \frac{1 - \varphi e^{\lambda_1 x}}{1 + \varphi} \frac{1}{s}; \quad \Delta\vartheta_r(s, x) = \frac{1 - \varphi e^{\lambda_2 x}}{1 + \varphi} \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (22)$$

wobei

$$\varphi = (1 + 2\tau s) - w \sqrt{[\beta(1 + \tau s) s]}$$

und

$$w = \frac{4v\tau}{A} \quad (23)$$

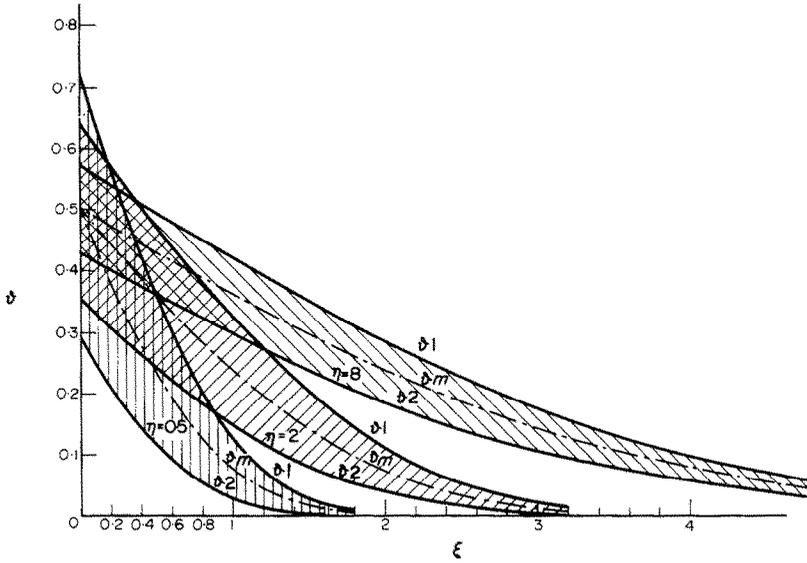


ABB. 5. Verlauf von ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_m in Abhängigkeit von der normierten Länge ξ mit der normierten Zeit η , für $\xi > 0$.

bedeutet. Folgende neue normierte Variablen erweisen sich als vorteilhaft

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta}{\tau}\right)} \\ S &= 2\tau s \\ \eta &= \frac{t}{2\tau} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Damit folgt zwangs-} \\ \text{läufig für den} \\ \text{Originalraum} \end{array} \quad (24)$$

Als gute Näherungen erweisen sich weiter:

$$\lambda_{1,2} \approx \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\tau} S\right)}$$

und
$$\frac{1-\varphi}{1+\varphi} \approx \frac{\sqrt{(2S)}}{2 + \sqrt{(2S)}} \quad (25)$$

Dadurch findet man schliesslich mit den Gl. (22)–(25) folgende Gleichungen für den Bildraum:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{ml}(S, \xi)}{2\tau \dots} &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-|\xi|\sqrt{2S}}}{2S} \quad \text{für } \xi < 0 \\ \frac{\vartheta_{mr}(S, \xi)}{2\tau} &= \frac{e^{-\xi\sqrt{(2S)}}}{2S} \quad \text{für } \xi > 0 \\ \frac{\Delta\vartheta(S, \xi)}{2\tau} &= \frac{e^{-|\xi|\sqrt{(2S)}}}{\sqrt{(S)(\sqrt{(2) + \sqrt{(S)})}} \quad \text{für } \xi \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Diese Gleichungen enthalten nur die normierten Variablen ξ und S und keine Parameter, wodurch ihre Darstellung verallgemeinert wird. Auch sind die Gleichungen so geformt, dass sie leichter rücktransformiert werden können. Die Lösungen im Originalraum ergeben sich aus Gl. (26), wie folgt:

$$\vartheta_m(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{(2\eta)}}\right) \quad (27)$$

$$\Delta\vartheta(\eta, \xi) = e^{2(\eta+|\xi|)} \cdot \operatorname{erfc}\frac{2\eta + |\xi|}{\sqrt{(2\eta)}} \quad (28)$$

Für die numerische Auswertung ist Gl. (28) nicht brauchbar. Sie kann zu diesem Zweck jedoch, wie folgt, umgeformt werden.

$$\Delta\vartheta(\eta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{(\pi)}} \frac{e^{(-\xi^2/2\eta)}}{\sqrt{(2\eta)} \cdot (|\xi|/\sqrt{(2\eta)})} \quad (29)$$

In Abb. 5 sind bei $x > 0$ für die Zeiten $\eta = 0, 5, 2$ und 8 der Temperaturverlauf von ϑ_m, ϑ_1 und ϑ_2 zu finden. Man sieht, dass dieser Anfangs sehr steil verläuft, sich jedoch später stark verflacht. Auch $\Delta\vartheta$ (schraffierte Fläche) ändert sich stark

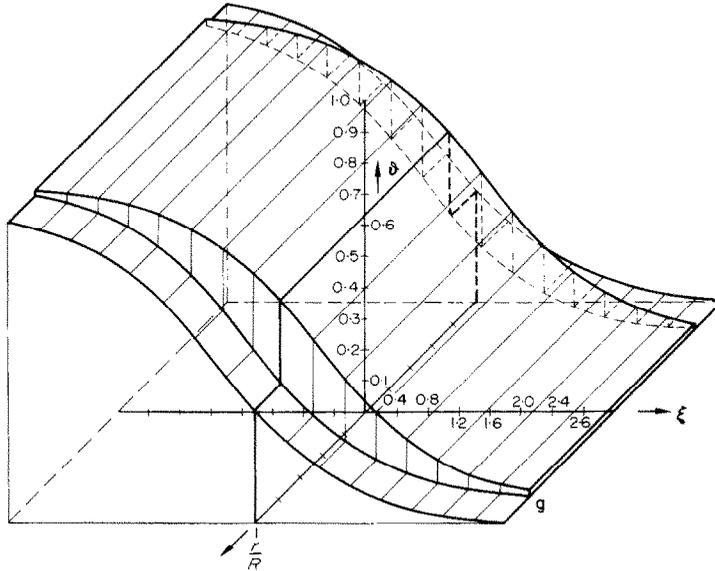


Abb. 6. Relief der Temperaturverteilung bei $\eta = 2$.

mit der Zeit. In Abb. 6 ist die Temperaturverteilung für $\eta = 2$ in Parallelperspektive gezeichnet.

3.4. Vergleich des axialen Wärmeflusses beider Modelle

Im eindimensionalen Modell ist der axiale Wärmefluss

$$Q_{ed} = -Ac\gamma a_f \frac{\partial t}{\partial x} \quad (30)$$

mit Gl. (14) und (15) wird daraus

$$Q_{ed} = \frac{\Delta T}{2} c\gamma A \sqrt{\left(\frac{a_f t}{\pi t}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a_f t}\right) \quad (31)$$

Im Zweischicht-Modell fließt die Wärme in der Kernschicht in positiver Achsenrichtung und der Wärmefluss beträgt hier, $vc\gamma T_1$. In der Randschicht fließt die Wärme in umgekehrter Richtung, und der Fluss beträgt $vc\gamma T_2$. Über den gesamten Rohrquerschnitt wird damit der Wärmefluss

$$Q_{mod} = vc\gamma(T_1 - T_2) = vc\gamma\Delta T \Delta\vartheta. \quad (32)$$

Mit den Gl. (24) und (28) findet sich ein

$$Q_{mod} = \frac{\Delta T}{2} c\gamma v \cdot \sqrt{\left(\frac{c\gamma A}{\pi Ukt}\right)} \times \frac{\exp - \frac{UkA}{c\gamma t} \left(\frac{x}{2v}\right)^2}{1 + \frac{A|x|}{4v t}}. \quad (33)$$

Soll das eine Modell durch das andere ersetzt werden können, so muss

$$Q_{ed} \equiv Q_{mod} \text{ Geltung haben.}$$

Vergleicht man die Gl. (31) und (33), so sieht man, dass dies nicht ganz wegen des Störgliedes

$$\frac{A|x|}{4v t} \text{ gelingt.}$$

Da $\Delta\vartheta$ eine Näherung darstellt, die für nicht zu kleine t -Werte Geltung hat, so kann obiges Störglied vernachlässigt werden. Man erhält dann folgenden Zusammenhang

$$a_f = \frac{c\gamma}{UA} \cdot \frac{v^2}{k} \text{ oder } Q_f \cdot \beta = 1. \quad (34)$$

Auf diese Weise gelingt ein Vergleich beider

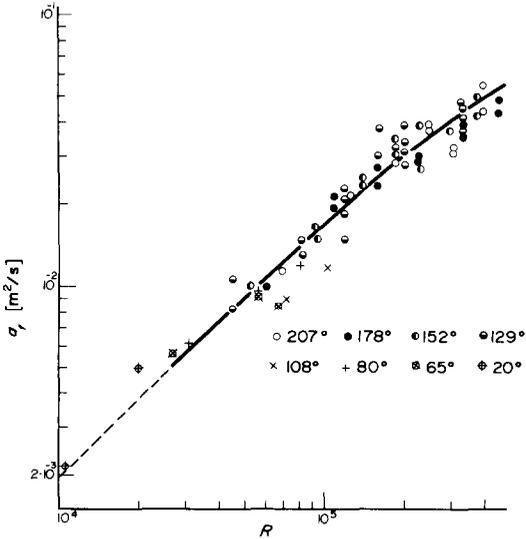


ABB. 7. Abhängigkeit der gemessenen Temperaturleitzahl a_f von der Re -Zahl bei verschiedenen Flüssigkeitstemperaturen.

Modelle. Ist a_f bekannt, so kann daraus v^2/k gefunden werden und umgekehrt.

Zur Bestimmung von a_f wurden im Reaktorzentrum Seibersdorf zahlreiche Messungen durchgeführt (siehe [2] und [9]). Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abb. 7 zusammengestellt. Die Abweichungen von der gezeichneten

Kurve sind im allgemeinen infolge der turbulenten Strömungserscheinungen gross. Die Flüssigkeitstemperaturen liegen zwischen 20 und 207°C. Eine Abhängigkeit des a_f von der Temperatur ist nicht feststellbar.

LITERATURHINWEISE

1. H. REICHARDT, Grundlagen des turbulenten Wärmeüberganges, *Arch. ges. Wärmetechn.* 2 (6/7), 129 (1951).
2. H. SCHMIDL *et al.*, Dynamische Untersuchung des Wärmeaustausches, 2. Jahresbericht 1963, SGAE-RE-1 (1964).
3. H. REICHARDT, Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten, *Z. Angew. Math. Mech.* 20 (6), 297 (1960).
4. H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 5. Auflage. Verlag G. Braun, Karlsruhe (1965).
5. H. L. LUDWIG, Bestimmung des Verhältnisses der Austauschoeffizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten, *Z. Flugwiss.* 4 (1/2), 73 (1956).
6. H. REICHARDT, Messungen turbulenter Schwankungen. *Naturwissenschaft* 404 (1938).
7. H. SCHMIDL, Die Übergangsfunktion des axialen Wärmeaustauschers bei turbulent durchflossenem Rohr. *E & M*, 83. Jg., H.3, 195 (1966).
8. H. REICHARDT, Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Z. Angew. Mech.* 31, 208 (1951).
9. G. EPEL, Ermittlung der Sprungantwort eines von Wasser (ohne Dampfbildung) turbulent durchflossenen Rohres, Diplomarbeit an der Techn. Hochschule, Wien (1969).

THE DYNAMICS OF AXIAL HEAT TRANSFER WITH TURBULENT FLOW IN A TUBE

Abstract— In a turbulent flow in a tube, heat transfer occurs by convection as well as by thermal diffusivity and eddy diffusivity for heat. Experiments show, however, that after a temperature disturbance at the tube entry is induced, an extraordinary fast temperature equalization is obtained in axial direction. This cannot be explained by the latter two effects mentioned before. An additional mechanism of heat transfer must be effective. Considering the effect in a coordinate system, which moves with average flow speed in axial direction, the location of disturbance seems to remain in place. We can distinguish in the tube two liquid layers with counter flow. Assuming a fictitious wall between the two layers, we obtain the model of a counter flow heat exchanger. Thus the heat transfer does not occur through the cross-section of the tube but along the much bigger surface of the fictitious wall. This explains the fast temperature equalization which is found in measurements.

DYNAMIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE AXIAL POUR UN ECOULEMENT TURBULENT DANS UN TUBE

Résumé— Pour un écoulement turbulent dans un tube, le transfert thermique se fait par convection aussi bien que par diffusivité moléculaire et diffusivité turbulente de la chaleur. Des expériences montrent, cependant qu'après qu'une perturbation de température soit appliquée à l'entrée du tube une égalisation extraordinairement rapide de la température est obtenue dans la direction axiale. Ceci ne peut être expliqué par les deux derniers effets mentionnés antérieurement.

Il doit exister un mécanisme additionnel de transfert thermique. Considérant le phénomène dans un système de coordonnées qui se déplace avec la vitesse de l'écoulement moyens dans la direction axiale, la localisation de la perturbation semble rester en place. Nous pouvons distinguer dans le tube deux couches liquides à contre-courant. En supposant une paroi fictive entre les deux couches nous obtenons le modèle d'un échangeur de chaleur à contre-courant. Cependant le transfert ne doit pas se produire à travers la section droite du tube mais le long de la surface la plus grande de la paroi fictive. Ceci explique la rapide égalisation de la température trouvée dans les expériences.

ДИНАМИКА АКСИАЛЬНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

Аннотация—При турбулентном течении в трубе теплообмен происходит не только конвекцией, но также путем молекулярного и турбулентного переноса. Однако эксперименты показали, что температурные возмущения на входе в трубу приводят в осевом направлении к исключительно быстрому выравниванию температуры, которое не может быть объяснено указанными способами переноса тепла. В данном случае дополнительно действует иной механизм. Если рассматривать процесс в системе координат, движущейся со средней скоростью течения в продольном направлении, то место возмущения оказывается неподвижным. В этом случае можно заметить два издвоенных слоя в трубе, текущих в противоположном направлении.

Если представить, что между обоими слоями имеется фиктивная перегородка, то получим модель противоточного теплообменника. Таким образом, процесс теплопереноса протекает не через сечение трубы, а через гораздо большую поверхность фиктивной перегородки. Этим объясняется более быстрое выравнивание температуры.